NOMBRE: ____

Nota:

CURSO: __________

(14-11-2012)

Mecánica y Gravitación

Cuestiones

1.- Sobre una partícula sólo actúan fuerzas conservativas. a) ¿Se mantiene constante su energía mecánica? Demuestre y razone la respuesta. b) Si sobre la partícula actúan además fuerzas de rozamiento, ¿cómo afectarían a la energía mecánica?

2.- a) Explique el Principio de Conservación de la Energía Mecánica y en qué condiciones se cumple.
b) Un automóvil, desciende por un tramo pendiente con el freno accionado y mantiene constante su velocidad. Razone los cambios energéticos que se producen.

3.- a) Enuncie las leyes de Kepler.
b) Razone, a partir de la segunda ley de Kepler, cómo cambia la velocidad de un planeta a lo largo de su órbita al variar la distancia al Sol.

4.- a) Considere un punto situado a una determinada altura sobre la superficie terrestre. ¿Qué velocidad es mayor en ese punto, la orbital o la de escape? b) A medida que aumenta la distancia de un cuerpo a la superficie de la Tierra disminuye la fuerza con que es atraído por ella. ¿Significa eso que también disminuye su energía potencial? Razone las respuestas.

Problemas

5.- Un cuerpo de 0,5 kg se lanza hacia arriba por un plano inclinado, que forma 30º con la horizontal, con una velocidad inicial de 5 ms^{-1}. El coeficiente de rozamiento es 0,2.
a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, cuando sube y cuando baja por el plano, y calcule la altura máxima alcanzada por el cuerpo.
b) Determine la velocidad con la que el cuerpo vuelve al punto de partida, y la compresión que realizaría sobre un muelle de constante elástica 1250 Nm^{-1}

$g = 10\ ms^{-2}$

6.- Suponga que la masa de la Tierra se duplicara.
a) Calcule razonadamente el nuevo periodo orbital de la Luna suponiendo que su radio orbital permaneciera constante.
b) Si, además de duplicarse la masa terrestre, se duplicara su radio, ¿cuál sería el valor de g en la superficie terrestre?

7.- Desde una altura de 5000 Km sobre la superficie terrestre se lanza hacia arriba un cuerpo con una cierta velocidad.

a) Explique para qué valores de esa velocidad el cuerpo escapará de la atracción terrestre.
b) Si el cuerpo se encontrara en una órbita geoestacionaria, ¿cuál sería su velocidad?.

$G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ Nm^2Kg^{-2}$; $R_T = 6400$ Km ; $M_T = 6{,}0\cdot10^{24}$ Kg

Examen de Mecánica y Gravitación

14-11-2012

1º) a) • Por el teorema de las Fuerzas Vivas: $W_{1,2} = \Delta E_c$

• Si solo existen fuerzas conservativas: $W_{\vec{F}_c\,1,2} = -\Delta U$ (por definición)

• Igualando: $\Delta E = -\Delta U \Rightarrow \Delta E_c + \Delta U = 0$

Si $E_m = E_c + E_p \Rightarrow \Delta E_c + \Delta U = \boxed{\Delta E_m = 0}$

* Si solo hay fuerzas conservativas, "La energía potencial no varía"

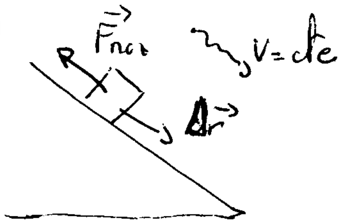
b) Si existen fuerzas de rozamiento, hay W_{roz}

$W_{roz} = \int_1^2 \vec{F}_{roz} \cdot d\vec{r}$ y: $\Delta E_c = -\Delta U + W_{roz}$ y por tanto

$\boxed{\Delta E_m = W_{roz}}$

2º) a) P.C. Em: "Si sobre un cuerpo sólo existen aplicadas fuerzas conservativas, la Energía Mecánica del cuerpo permanece constante".
Es decir la condición es <u>NO HAY</u> fuerzas <u>NO</u> conservativas; sólo hay fuerzas conservativas

• Este principio, nos indica que a lo largo de la trayectoria del objeto, la energía mecánica del mismo, es igual, y se pueden establecer expresiones como $E_{m_1} = E_{m_2}$ donde 1 y 2, son dos puntos cualesquiera de la trayectoria.

b) 

• Existen en este caso 3 tipos de energía (E_c, E_p, E_m) y el trabajo realizado por el rozamiento (el cuerpo frena $\Rightarrow \exists\, \vec{F}_{roz}$)

Por tanto:

① E_c : $E_c = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow$ Si $v = cte \rightarrow \boxed{E_c = cte}$

② E_p : $E_p = mgh \Rightarrow$ Si $h\downarrow \Longrightarrow \boxed{E_p \downarrow}$

③ E_m : $E_c + E_p \Rightarrow v = cte$ y $h\downarrow \Rightarrow \boxed{E_m \downarrow}$

Por último: $\exists\, W_{roz}$ de valor: $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$ y $\boxed{W_{roz} < 0}$

Al ser $W_{roz} < 0 \Rightarrow$ Lo realiza el cuerpo a costa de perder energía:

$\Delta E_m = W_{roz}$ ó $E_{m_2} - E_{m_1} = W_{roz}$

y $E_{m_2} < E_{m_1} \Rightarrow \boxed{W_{roz} < 0}$

3º) a) Leyes de Kepler.-

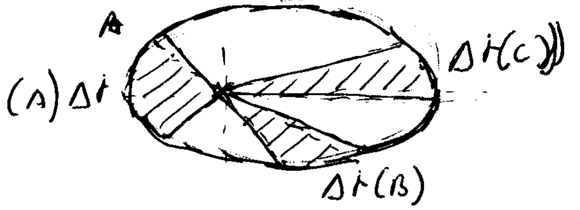
① Todos los planetas describen órbitas elípticas con el Sol situado en uno de los focos de la elipse.

② La recta que une un planeta con el Sol, barre áreas iguales en tiempos iguales.

③ El cuadrado del periodo del movimiento de un planeta, es directamente proporcional al cubo de la distancia media del planeta al Sol. $T^2 = k R^3$

• Estas leyes, se deducen en la actualidad del hecho de que el campo de fuerza gravitorio es central y por tanto el momento de la fuerza es nulo.

b) Si distinguimos una trayectoria elíptica y en ella las condiciones de la 2ª Ley de Kepler.



Ya que en el mismo tiempo (Δt), las áreas trazadas deben tener el mismo área, la única posibilidad, es que la velocidad $V_A > V_B > V_C$, ya que las distancias recorridas $d_A > d_B > d_C$ y el valor de Δt, es el mismo.

En esencia, si el planeta está cerca del Sol, la velocidad es mayor que cuando está lejos, cambiando de manera continua a lo largo de la trayectoria, para que el valor del área recorrida sea la misma.

4º) a) ① $h = h$;

$V_{esc}(h) \Rightarrow E_{m_h} = E_{m_\infty} \Rightarrow \frac{1}{2} \cancel{m} V_{esc}^2 - G\frac{M_T \cancel{m}}{(R_T+h)} = 0$

$V_{orb}(h) \Rightarrow \vec{F}_g = \vec{F}_{cp} \Rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T+h)^2} = m\frac{V_{orb}^2}{(R_T+h)}$

$$\left.\begin{array}{l} V_{esc}(h) = \sqrt{\dfrac{2GM_T}{(R_T+h)}} \\ V_{orb}(h) = \sqrt{\dfrac{GM_T}{(R_T+h)}} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{V_{esc}(h) = \sqrt{2} \cdot V_{orb}(h)}$$

La velocidad de escape es $\sqrt{2}$ mayor que la velocidad orbital.

b) Por definición: $|\vec{F}_g| = G\frac{M_T \cdot m}{(R_T+h)^2}$ y $U_g = -G\frac{M_T \cdot m}{(R_T+h)}$

Si $h \uparrow \Rightarrow \begin{cases} F_g \downarrow \text{ (por aumentar el denominador)} \\ U_g \uparrow \text{ (el denominador se hace mayor y menor la fracción, pero al ser negativo, el número es mayor.} \end{cases}$

③

5º) $m = 0{,}5\ Kg$ PLANO INCLINADO $30°$

$V_0 = 5\ m/s$

$\mu_R = 0{,}2$

a) ESQUEMA FUERZAS h_{MAX}

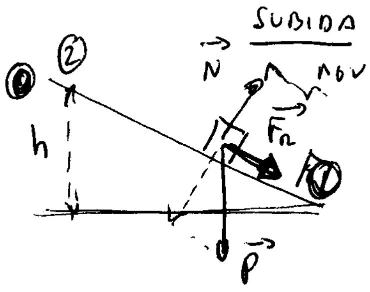
b) V_{BAJADA} Y COMPRESION MUELLE $K = 1250\ N/m$

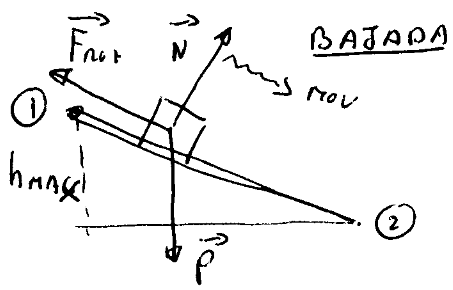
$g = 10\ m/s^2$

F.F.: MOVIMIENTO → FUERZAS / ENERGIA

$\exists \vec{F}_{ROZ} \Rightarrow W_{ROZ}$

a)





a) YA QUE EXISTEN $\vec{F}_R \Rightarrow \Delta E_m = W_{ROZ}$. [1]

PUNTO 1 → ABAJO EN EL PLANO (LANZAMIENTO)

PUNTO 2 → ARRIBA " (ALTURA MAXIMA)

$$E_{m_1} \rightarrow \begin{cases} E_{c_1} \ \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow E_{c_1} = \frac{1}{2} 0{,}5 \cdot 5^2 \\ E_{p_1} \ m g h_0 \Rightarrow E_p = 0 \end{cases} \qquad E_{m_2} \begin{cases} E_{c_2} = 0 \\ E_{p_2} = 0{,}5 \cdot 10 \cdot h \end{cases}$$

$$W_{ROZ} = \vec{F}_{ROZ} \cdot \Delta\vec{r} \ ; \ W_{ROZ} = F_{ROZ} \cdot \Delta r \cdot \cos(180°).$$

COMO $F_{ROZ} = \mu N \Rightarrow N = m g \cos\alpha$;

SUSTITUYENDO $W_{ROZ} = (0{,}5 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}2)\ \Delta r \cdot (-1)$ Como $\Delta r \cdot \operatorname{sen}\alpha = h$

$\Delta r = \dfrac{h}{\operatorname{sen}\alpha}$

$$W_{ROZ} = \left(0{,}5 \cdot 10 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}2\right) \frac{h}{\frac{1}{2}} \cdot (-1) =$$

$$= -1{,}732 \cdot h \ \ J$$

APLICANDO [1]: $\Delta E_m = W_{ROZ}$

$$5h - 6{,}25 = -1{,}732 h \Rightarrow \boxed{h = 0{,}928\ m}$$

b) Según el dibujo de bajada: $\exists \vec{F}_{ROZ} \Rightarrow \Delta E_m = W_{ROZ}$

PUNTO 1 → ARRIBA EN EL PLANO

" 2 → ABAJO "

$$E_{m_1} \rightarrow \begin{cases} E_{c_1} \rightarrow E_{c_1} = 0 \quad (v_1 = 0) \\ E_{p_1} \rightarrow E_p = m g h_{MAX} \Rightarrow E_p = 0{,}5 \cdot 10 \cdot 0{,}928 = 4{,}64\ J \end{cases}$$

$$E_{m_2} \rightarrow \begin{cases} E_{c_2} \rightarrow E_{c_2} = \frac{1}{2} m V_2^2 \\ E_p \rightarrow E_p = 0 \quad (h = 0) \end{cases}$$

$$W_{ROZ} = \vec{F}_{ROZ} \cdot \Delta\vec{r} \Rightarrow W_{ROZ} = F_{ROZ} \cdot \Delta r \cos(180°)$$

$$F_{ROZ} = 0{,}866\ N \ ; \ \Delta r = \frac{h_{MAX}}{\operatorname{sen} 30°} \Rightarrow \Delta r = 1{,}856\ m$$

5°) b) $W_{roz} = 0,866 \cdot 1,856 \cdot (-1) = -1,607\,J$

Por PCEm: $\Delta E_m = W_{roz}$

$\frac{1}{2} 0,5\, V_2^2 - 4,64 = -1,607 \rightarrow \boxed{V_2 = 3,483\, m/s}$

• Considerando el muelle ⇒ Existe energía potencial elástica Ee.
Aplicando P.C Em entre el punto 2 (bajada) y el punto 3, (muelle comprimido):

$$E_{m_2} \begin{cases} E_{c_2} = \frac{1}{2} 0,5\,(3,483)^2 \\ E_{p_2} = 0 \\ E_{e_2} = 0 \text{ (NO HAY MUELLE)} \end{cases} \qquad E_{m_3} \begin{cases} E_{c_3} = 0 \\ E_{p_3} = 0 \\ E_{e_3} = \frac{1}{2} K x^2 \Rightarrow \frac{1}{2} 1250 \cdot x^2 \end{cases}$$

* Despreciando el trabajo de rozamiento durante el proceso de compresión: (suponemos que la compresión es pequeña)

$$\frac{1}{2} 0,5\,(3,483)^2 = \frac{1}{2} 1250\, x^2$$

$$3,033 = 625\, x^2 \rightarrow \boxed{x = 0,0696\, m}$$

* Si comprobamos el valor de la fuerza y trabajo de rozamiento:

W_{roz} (EN LA COMPRESIÓN):

$$W_{roz} = 0,866 \cdot 6,96 \cdot 10^{-2} = \quad 7\,J$$

Se justifica que el trabajo de rozamiento es despreciable frente al valor de la Em: 4,52 J ⇒ $W_{roz} \simeq 1,33\%$.

⇒ Este problema podría usando procedimientos dinámicos y cinemáticos, obtener el valor de Δr (distancia recorrida) y con él la altura:

① → $\Sigma \vec{F}$; ② $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$; ③ $\vec{a} = cte \Rightarrow$ MRUA.

④ $\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t \end{cases}$

Aunque este procedimiento es más largo, (aunque no INCORRECTO)

6º) $M_T' = 2M_T \rightarrow T_{ORB}/T'_{ORB}$? F.F. GRAVITACIÓN

a) $r_{ORB} = r'_{ORB}$ a) → ÓRBITA ⇒ $\vec{F}_g = \vec{F}_{cp}$

b) $M_T' = 2M_T$, $R_T' = 2R_T$ ⇒ $\frac{g_0'}{g_0}$?

a) Como existe órbita: $\vec{F}_g = \vec{F}_{cp} \Rightarrow F_g = F_{cp}$ y $V_{ORB} = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$

El periodo orbital, sería:

$$T_{ORB} = \frac{2\pi r}{V_{ORB}} \Rightarrow T_{ORB} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_T}{r}}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}}$$

- En este punto, podemos observar el cumplimiento de la 3ª Ley de Kepler.

$$T^2 = K r^3 \text{ donde en este caso, } K = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

- Realizando el cociente entre los periodos orbitales final e inicial:

$$\frac{T'_{ORB}}{T_{ORB}} = \frac{\sqrt{\frac{4\pi^2 r'^3}{GM_T'}}}{\sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}}} \Rightarrow \frac{T'^2_{ORB}}{T^2_{ORB}} = \frac{\frac{r'^3}{M_T'}}{\frac{r^3}{M_T}} = \frac{M_T}{M_T'} \cdot \frac{r'^3}{r^3}$$

- Sustituyendo datos:

$$\frac{T'^2_{ORB}}{T^2_{ORB}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \Rightarrow T'_{ORB} = \sqrt{2 \cdot T^2_{ORB}} = \sqrt{2} \cdot T_{ORB};$$

$$\boxed{T'_{ORB} = \sqrt{2} \cdot T_{ORB}}$$

El nuevo periodo orbital es $\sqrt{2}$ veces mayor que el inicial.

b) $g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$; aplicando la expresión a los valores inicial y final:

$$\frac{g_0'}{g_0} = \frac{G \cdot \frac{M_T'}{R_T'^2}}{G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}} = \frac{M_T'}{M_T} \cdot \frac{R_T^2}{R_T'^2}$$. Sustituyendo datos:

$$\frac{g_0'}{g_0} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \; ; \; \boxed{g_0' = \frac{g_0}{2}}$$

El nuevo valor de intensidad de campo gravitatorio en la superficie, se reduce a la mitad.

7°) $h = \cancel{5000\,km} = 5 \cdot 10^6\,m$

F. FIS → GRAVITACIÓN

a) V_{ESC} ?

b) $V_{GEOEST.}$

a) $\nexists \vec{F}_{ROZ} \rightarrow E_{m_1} = E_{m_2}$

b) ÓRBITA → $\vec{F}_g = \vec{F}_{CP}$

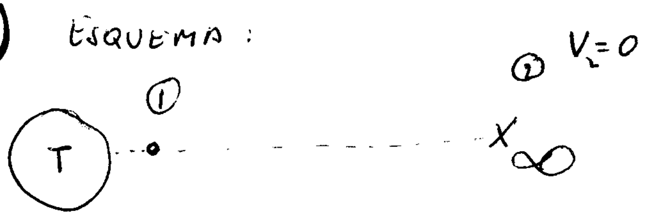
GEOESTACIONARIA → $W_T = W_{ORB}$

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ SI

$R_T = \cancel{6400\,km} = 6{,}4 \cdot 10^6\,m$

$M_T = 6 \cdot 10^{24}\,kg$

a) ESQUEMA :



Ya que $\nexists \vec{F}_{ROZ}$, $E_{m_1} = E_{m_2}$:

$$E_{m_1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_{C_1} = \frac{1}{2} m V_1^2 ;\ E_{C_1} = \frac{1}{2} m V_{ESC}^2 \\ U_1 = -G \frac{M_T m}{r} ;\ U_1 = -G \frac{M_T \cdot m}{r_1} \end{array} \right\} \Rightarrow E_{m_1} = \frac{1}{2} m V_{ESC}^2 - G \frac{M_T m}{r}$$

$$E_{m_2} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_{C_2} \rightarrow 0 \text{ por } V_2 = 0 \text{ (ya que calculamos la velocidad mínima)} \\ U_2 \rightarrow 0 \text{ por DEFINICIÓN (además si } r = \infty \Rightarrow U = 0) \end{array} \right.$$

- Igualando :

$$\frac{1}{2} \cancel{m} V_{ESC}^2 - G \frac{M_T \cancel{m}}{r} = 0 \Rightarrow V_{ESC} = \sqrt{\frac{2 G M_T}{r}}$$

$(r = R_T + h)$ → IMPORTANTE

$$V_{ESC} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(5 \cdot 10^6 + 6{,}4 \cdot 10^6)}} = 8379{,}2\ m/s \qquad \boxed{V_{ESC} = 8379{,}2\ m/s}$$

b) ÓRBITA → $\vec{F}_g = \vec{F}_{CP}$

GEOESTACIONARIA → $W_T = W_{ORB}$

- Puesto que el satélite se encuentra en órbita :

$$F_g = F_{CP} \rightarrow G \frac{M_T \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{V^2}{\cancel{r}} \Rightarrow V_{ORB} = \sqrt{\frac{G M}{r}} \quad (*)$$

- Además, si es geoestacionaria, $W_T = W_{ORB}$ y por tanto.

① $W_T = \dfrac{2\pi}{86400} = 7{,}272 \cdot 10^{-5}\ rad/s$

② $W_{ORB} = \dfrac{V_{ORB}}{r} \Rightarrow V_{ORB} = W_{ORB} \cdot r\ (w_T \cdot r) \quad (**)$

7º) La forma más rápida de resolver el problema es despejar el radio de la órbita (r) en las dos expresiones anteriores (*) y (* *) e igualar:

$$(*) \rightarrow V_{ORB}^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow r = \frac{GM}{V_{ORB}^2}$$

$$(* *) \rightarrow V_{ORB} = W_T \cdot r \Rightarrow r = \frac{V_{ORB}}{W_T}$$

Igualando:

$$\bullet \quad \frac{G \cdot M}{V_{ORB}^2} = \frac{V_{ORB}}{W_T} \longrightarrow V_{ORB} = \sqrt[3]{G\,M_T \cdot W_T}$$

$$V_{ORB} = \sqrt[3]{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 7{,}272 \cdot 10^{-5}} = 3075{,}9 \ m/s$$

$$\boxed{V_{ORB} = 3075{,}9 \ m/s}$$

* También sería correcto entre (*) y (* *) despejar el valor de r (como se hizo en clase) y obtener la altura de la órbita. Con ella, se calcularía V_{ORB}.