MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 1: MATRICES

- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule las matrices X **e** Y **si:** $X+Y=2A$ **y** $X+B=2Y$

b) Analice cuáles de las siguientes operaciones con matrices se pueden realizar, indicando en los casos afirmativos las dimensiones de la matriz D.

$$A+D=C \qquad A\cdot D=C^t \qquad D\cdot A=C \qquad D\cdot A=C^t$$

SOCIALES II. 2015 JUNIO EJERCICIO 1. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) Resolvemos el sistema matricial

$$\left.\begin{array}{l} X+Y=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ X-2Y=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} X+Y=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ -X+2Y=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow 3Y=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Y=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X+\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$A_{(2,2)}+D=C_{(3,2)}$ No se puede, ya que para sumar matrices, éstas tienen que tener el mismo orden y la matriz resultante, también es del mismo orden.

$A_{(2,2)}\cdot D_{(2,3)}=C^t{}_{(2,3)}$ Si se puede, la matriz D es de orden $(2,3)$

$D_{(3,2)}\cdot A_{(2,2)}=C_{(3,2)}$ Si se puede, la matriz D es de orden $(3,2)$

$D\cdot A_{(2,2)}=C^t{}_{(2,3)}$ No se puede, ya que la matriz resultante debe tener tantas columnas como columnas tiene la matriz A, y $2\neq 3$

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) Efectúe la operación $A\cdot B^t$
b) Determine la matriz X **tal que** $A+2X=B$
c) Halle la matriz Y **tal que** $B\cdot Y=\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

SOCIALES II. 2015 RESERVA 1 EJERCICIO 1. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos $A\cdot B^t$

$$A\cdot B^t=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 13 & -5 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos la matriz X

$$2\cdot X=B-A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Calculamos la matriz Y

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3a-2b=6 \\ a+4b=9 \end{array}\right\}\Rightarrow a=3\ ;\ b=\frac{3}{2}$$

Luego, la matriz que nos piden es: $Y=\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix}$ **,** $B=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&-2&0\end{pmatrix}$ **,** $C=\begin{pmatrix}2&1\end{pmatrix}$ **,** $D=\begin{pmatrix}1&-1&2\end{pmatrix}$

a) Estudie cuáles de los siguientes productos de matrices se pueden realizar, indicando las dimensiones de la matriz resultante:

$$A\cdot B^t \qquad C^t\cdot D \qquad B^t\cdot D \qquad D\cdot B^t$$

b) Despeje la matriz X **en la ecuación** $X\cdot A^{-1}+2B=3C^t\cdot D$**, sin calcular sus elementos.**

c) Calcule la matriz $A\cdot(B^t-2D^t\cdot C)$

SOCIALES II. 2015 RESERVA 2 EJERCICIO 1. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a)

$A_{(3,3)}\cdot B^t_{(3,2)}\Rightarrow(3,2)$ Si se puede, ya que el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de filas de la segunda matriz. La matriz resultante es de orden $(3,2)$.

$C^t_{(2,1)}\cdot D_{(1,3)}\Rightarrow(2,3)$ Si se puede, ya que el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de filas de la segunda matriz. La matriz resultante es de orden $(2,3)$.

$B^t_{(3,2)}\cdot D_{(1,3)}\Rightarrow No$. No se puede, ya que el número de columnas de la primera matriz no coincide con el número de filas de la segunda matriz.

$D_{(1,3)}\cdot B^t_{(3,2)}\Rightarrow(1,2)$ Si se puede, ya que el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de filas de la segunda matriz. La matriz resultante es de orden $(1,2)$.

b) Multiplicamos los dos términos a la derecha por la matriz A.

$$X\cdot A^{-1}+2B=3C^t\cdot D\Rightarrow X\cdot A^{-1}=3C^t\cdot D-2B\Rightarrow X\cdot A^{-1}\cdot A=(3C^t\cdot D-2B)\cdot A\Rightarrow$$
$$\Rightarrow X\cdot I=(3C^t\cdot D-2B)\cdot A\Rightarrow X=(3C^t\cdot D-2B)\cdot A$$

c)

$$A\cdot(B^t-2D^t\cdot C)=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}1&1\\2&-2\\1&0\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}1&1\\2&-2\\1&0\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}2&1\\-2&-1\\4&2\end{pmatrix}\right]=$$
$$=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&-1\\6&0\\-7&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-23&-9\\13&4\\-17&-9\end{pmatrix}$$

Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

a) Resuelva la ecuación $A\cdot X+B\cdot X=C$

b) Calcule A^4 **y** A^{80}

SOCIALES II. 2015 RESERVA 3 EJERCICIO 1. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a) Resolvemos la ecuación que nos dan.

$$A\cdot X+B\cdot X=C\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-c & -d\\ a & b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a+c & b+d\\ a+c & b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}a & b\\ 2a+c & 2b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}a=2\\ b=1\\ 2a+c=3\\ 2b+d=2\end{array}\right\}\Rightarrow a=2\ ;\ b=1\ ;\ c=-1\ ;\ d=0$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

b)

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^2\cdot A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

$$A^{80}=(A^4)^{20}=I^{20}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) Resuelva la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_2$

b) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcule los valores de a y b para que se verifique la ecuación $M \cdot A = A$

SOCIALES II. 2015 RESERVA 4 EJERCICIO 1. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{r} 2a+c = 0 \\ a+2c = 0 \\ 2b+d = 1 \\ b+2d = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 0 \ ; \ b = 1 \ ; \ c = 0 \ ; \ d = -1$$

Luego, la matriz que nos piden es:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Resolvemos la ecuación.

$$M \cdot A = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 2 \ ; \ b = 1$$

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **,** $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **,** $C=\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$

a) Calcule A^2

b) Resuelva la ecuación matricial: $A\cdot X+4B=C^t$ **.**

SOCIALES II. 2015 SEPTIEMBRE EJERCICIO 1. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos A^2

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ -4 & -4 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 12 & -8 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ -a+2d & -b+2e & -c+2f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 & -16 \\ 0 & 12 & -4 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$\Rightarrow a=2\ ;\ b=-4\ ;\ c=-6\ ;\ d=1\ ;\ e=4\ ;\ f=-5$

Luego la matriz que nos piden es: $X=\begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$